Задания
I (первого) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам всех решенных заданий I тура команда может получить 18 баллов (то есть по шесть баллов за каждое правильно решенное задание) 10 минут на решение заданий I тура)

I −1.

Трава на лугу растёт одинаково густо и быстро. Известно, что 70 лошадей сьели бы всю траву за 24 дня, а 30 лошадей за 60 дней. Сколько лошадей смогут съесть всю траву на лугу за 96 дней?

Решение:
Первый способ.

Количество травы, которую одна лошадь ест за день, возьмем как за одну часть.
1) Количество травы через 24 дней: 70·24=1680 (часть).
2) Количество травы через 60 дней: 30·60=1800 (часть).
3) Количество травы,выросшие за 36 дней: 1800 −1680 = 120 (часть).
4) Количество травы на лугу через 96 дней: 1800 +120 = 1920 (часть).
5) Сколько лошадей сьедает за 96 дней всю траву на луге:
1920:96= 20 лошадей.

Второй способ. Количество травы на луге возьмем за y. Количество травы которое вырастает за каждый день возьмем как x.
Тогда количество травы которое сьедает 70 лошадей за 24 дня: y+24x,
точно также 30 лошадей за 60 дней: y+60x.
Составим пропорцию:

$$\frac{70\cdot 24}{30\cdot 60}=\frac{y+24x}{y+60x}$$

$$\frac{14}{15}=\frac{y+24x}{y+60x}$$

$$15y+360x=14y+840x$$

$$y=480x$$

Первоначальное количество травы больше ежедневно проросшей травы в 480 раз.
70 лошадей за 24 дня 504x травы
t лошадей за 96 дня y+96x травы
70 --- 24 --- 504x
t --- 96 --- 576x

$$\frac{70\cdot 24}{t\cdot 96}=\frac{504x}{576x};\qquad 14t=280$$

$$\frac{35}{2t}=\frac{7}{8}\qquad t=20$$

Ответ : 20 лошадей.

Задания
I (первого) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам всех решенных заданий I тура команда может получить 18 баллов (то есть по шесть баллов за каждое правильно решенное задание) 10 минут на решение заданий I тура)

I −2.

$(\boldsymbol{x^2 - x - 1})^3 + (\boldsymbol{2x^2 - x - 7})^3 = (\boldsymbol{3x^2 - 2x - 8})^3$ **решите уравнение.**

Решение: Введем обозначение и разложим на множители:

$x^2 - x - 1$=a ,$2x^2 - x - 7$=b

$$(x^2 - x - 1)^3 + (2x^2 - x - 7)^3 = \left((x^2 - x - 1) + (2x^2 - x - 7)\right)^3 \Rightarrow$$

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 \Rightarrow$ (a+b)$(a^2 - ab + b^2)$ =$(a + b)^3 \Rightarrow$

(a+b)$(a^2 - ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2))$=0 ⇒ (a+b)(-3ab) =0 $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 0 \\ 2x^2 - x - 7 = 0 \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ x= $-\frac{4}{3}$;2;$\frac{1 \pm \sqrt{57}}{4}$;$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

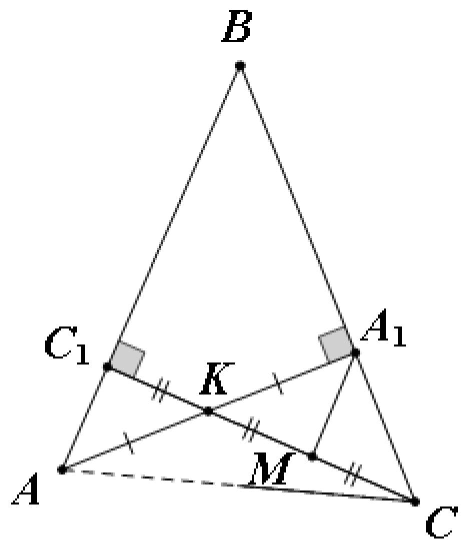
Задания
I (первого) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам всех решенных заданий I тура команда может получить 18 баллов (то есть по шесть баллов за каждое правильно решенное задание) 10 минут на решение заданий I тура)

I −3.

В треугольнике АВС, высоты опущенные из вершин А и С, пересекаются внутри треугольника и точка пересечения делит одну высоту пополам, а другую в соотношении 2:1. Найдите угол В

Решение: Пусть точка К- пересечение высот AA_1 и CC_1. Тогда по условию задачи $AK=KA_1$; $CK=2KC_1$. Если точка М-середина отрезка СК, тогда треугольники KMA_1и KC_1A равны (по I признаку равенства треугольников). Отсюда $AC_1= MA_1$. По свойству медиан в прямоугольном треугольнике $MA_1=\frac{KC}{2}$. Значить $AC_1= MK = KC_1$. Так как треугольник KAC_1прямоугольный равнобедренний то $\angle KAC_1=45^0$. Отсюда $\angle B=90^0 - \angle KAC_1=45^0$, так как AA_1B треугольник –прямоугольний.



Задания
II (второго) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам всех решенных заданий II тура команда может получить 21 баллов (то есть по семь баллов за каждое правильно решенное задание) 15 минут на решение заданий II тура)

II −1.

Число 27000001 разложите на простые множители и найдите их сумму.

Решение:
27000001=27000000+1=300^3+1^3=$(300+1)(300^2-300\cdot 1+1^2)=301$·$(300^2+2\cdot 300+1^2-3\cdot 300)$=301·$((300+1)^2-900)$=301·(301+30)(301-30)=301·271·331=7·43·271·331.

С помощью деления на числа 2,3,5,7,11,13 < $\sqrt{271}$ и 2,3,5,7,11,13,17 < $\sqrt{331}$ проверим будут ли числа 271 и 331 простыми или составными . Найдем их сумму 7+43+271+331=652.

Задания
II (второго) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам всех решенных заданий II тура команда может получить 21 баллов (то есть по семь баллов за каждое правильно решенное задание) 15 минут на решение заданий II тура)

II −2.

В уравнении (k-2)x^2-2(k+3)x+4k = 0 при каком значении k, один корень будет меньше 2-х, другой корень - больше 3-х.

Решение:

Для функций f(x) =(k-2)x^2-2(k+3)x+4k рассмотрим два случая.

а) Пустьk > 2 (ветви параболы направлен вверх).В этом случае

$$\begin{cases} k > 2 \\ f(2) < 0 \\ f(3) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 2 \\ 4(k-2) - 4(k+3) + 4k < 0 \\ 9(k-2) - 6(k+3) + 4k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 2 \\ 4k < 20 \\ 7k < 36 \end{cases}$$

k∈(2;5)

ә) Пустьk < 2 (ветви параболы направлены вниз).В этом случае

$$\begin{cases} k<2 \\ f(2) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<2 \\ 4(k-2) - 4(k+3) + 4k > 0 \\ 9(k-2) - 6(k+3) + 4k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<2 \\ 4k > 20 \\ 7k > 36 \end{cases}$$

k∈ ∅.

Ответk∈(2;5).

Задания
II (второго) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

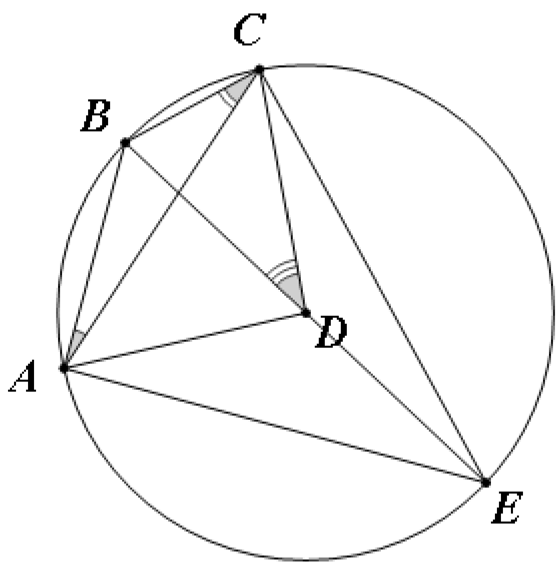
(по итогам всех решенных заданий II тура команда может получить 21 баллов (то есть по семь баллов за каждое правильно решенное задание) 15 минут на решение заданий II тура)

II −3.

Для выпуклого четырехугольника ABCD: $\angle BAC=20^0, \angle BCA=35^0, \angle BDC=40^0, \angle BDA=70^0$. Найдите угол между диагонали четырехугольника.

Решение:

Окружность описанная около треугольника ABC обозначим ω .Пусть прямая BD пересекает окружность ω в точкке E . Так как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги будут равны, $\angle DEC= \angle BAC=20^0$. $\angle BDC$ внешний угол для DEC и $\angle BDC=40^0$ из этого $\angle DCE=20^0$.Тогда ED=DC . Точно также доказываем ED=AD . Поэтому точка D-является центром окружности ω. Значит$\angle DCA=\frac{1}{2}(180^0-110^0)=35^0$. Тогда ответ будет $\angle BMC=40^0+35^0=75^0$.



Задания
III (третьего) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам III тура команда может получить 24 балла (то есть по восемь баллов за каждое правильно решенное задание) 20 минут на решение заданий III тура)

III −1.

Даны любые десять натуральных чисел. Выберем любые два числа и обозначим модули их сумм, разности и произведения. Сколько наибольшее количество нечетних чисел среди этих обозначенных чисел.

Решение:

Из данных десяти чисел количество нечетных чисел k , тогда количество четных чисел 10-k. Тогда среди этих чисел количество чисел ,сумма которых будут нечетными равна k(10-k) .А количество чисел модуль разности которых будет нечетными равно тоже k(10-k), а произведение которых будут нечетными равно $\frac{1}{2}$k(k-1). Тогда среди данных чисел количество всего нечетных чисел равно

$N=k(10-k) + k(10-k) + \frac{1}{2}k(k-1) = 2k(10-k) + \frac{1}{2}k(k-1)$. Преобразуем:

$N = 2k(10-k) + \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{1}{2}(39k-3k^2) = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2} - k\right)^2\right)$. Отсюда подберем значение k и найдемk=6 и k=7. Только в этом значений N принимает наибольшое значение. В обойх случаях выходит N=63, значит найбольшое количества нечетных чисел 63.

Задания
III (третьего) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам III тура команда может получить 24 балла (то есть по восемь баллов за каждое правильно решенное задание) 20 минут на решение заданий III тура)

III−2.

Пусть положительные числа a и b такие, что выполняется неравенство ab > 2018a+2019b . Докажите неравенство
a+b > $\left(\sqrt{\mathbf{2018}}+\sqrt{\mathbf{2019}}\right)^{\mathbf{2}}$**.**

Решение:

Обе сторон неравенств ab > 2018a+2019b перемножим на выражение $\frac{a+b}{ab}$.Тогда неравенство принимает вид a+b > $\frac{2018(a+b)}{b}+\frac{2019(a+b)}{a}$.Применив неравенств Коши, получаем:

$\frac{2018(a+b)}{b}+\frac{2019(a+b)}{a}$= 2018+$\frac{2018a}{b}+\frac{2019b}{a}$+2019 ≥ 2018+2·$\sqrt{\frac{2018a}{b}\cdot\frac{2019b}{a}}$+2019= $\left(\sqrt{2018}+\sqrt{2019}\right)^2$. Неравенство доказано.

Задания
III (третьего) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

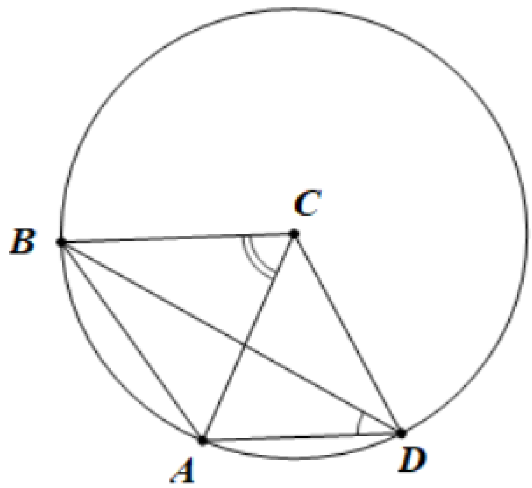
(по итогам III тура команда может получить 24 балла (то есть по восемь баллов за каждое правильно решенное задание) 20 минут на решение заданий III тура)

III −3.

Для трапеции ABCD (AD∥BC) 2·$\angle ADB$=$\angle ACB$ и BC=AC=5, AD=6. Найдите площадь трапеции.

Решение:

Из равенств CB=CA и $\angle ACB$=2·$\angle ADB$ следует что по теореме центров окружности точка D, лежит на окружности у которого центром является точка C и радиус CB. Поэтому треугольникACD является равнобедренным. Если h-это высота опушенный из вершины C,то h=$\sqrt{5^2-3^2}$ и S=$\frac{6+5}{2}$·4=22.



Задания
IV (четвертого) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам IV тура команда может получить 27 балла (то есть по в 9 баллов за каждое правильно решенное задание) 25 минут на решение заданий IV тура)

IV−1.

Если $x_k = \frac{k}{2005}$, где k=1,2,3,...,2004, наидите сумму выражения
$\frac{x_1^3}{1-3x_1+3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1-3x_2+3x_2^2} + \cdots + \frac{x_{2004}^3}{1-3x_{2004}+3x_{2004}^2}$.

Решение:

Введем обозначение f(x) = $\frac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Тогда из $\frac{x^3}{1-3x+3x^2} = \frac{x^3}{(1-x)^3+x^3}$ получим f(x)+f(1-x) =1. Тогда получается $\frac{x_1^3}{1-3x_1+3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1-3x_2+3x_2^2} + \cdots + \frac{x_{2004}^3}{1-3x_{2004}+3x_{2004}^2} =$ (f(x_1)+f(x_{2004}))+ (f(x_2)+f(x_{2003}))+…+ (f(x_{1002})+f(x_{1003})) =$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1002}$= 1002

Задания
IV (четвертого) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам IV тура команда может получить 27 балла (то есть по в 9 баллов за каждое правильно решенное задание) 25 минут на решение заданий IV тура)

IV−2.

Докажите, что число $\sin 10^0$ будеть иррациональным.

Решение:

Методом от противного, предположим $\sin 10^0$ рациональное число. Тогда из равенств $\sin 30^0=\frac{1}{2}$ получим 2$\sin 30^0$=1. Применив формулу $\sin 3x = 3\sin x - 4(\sin x)^3$ получаем $\sin 30^0$=$\sin 3\cdot 10^0$=
3$\sin 10^0$-4$(\sin 10^0)^3$ ⇒ 1 = 2$(3\sin 10^0 - 4(\sin 10^0)^3)$=
6$\sin 10^0$-8$(\sin 10^0)^3$. тогда получаем $8(\sin 10^0)^3 - 6\sin 10^0 + 1$= 0 кубическое уравнение. Введем обозначение $\sin 10^0$ =t. Получаем уравнение $8t^3 - 6t + 1 = 0$.Если у кубическом уравнений есть рациональные корни, тогда корни будет $\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{1}{8};$ виде. Все эти значений последователно поставив на уравнеие $8t^3 - 6t + 1 = 0$, проверим что эти числа не будет корнем уравнений тогда t-иррационал. Значит $\sin 10^0$ будет иррационалным числом.

Задания
IV (четвертого) тура республиканской олимпиады
«Математическая регата»

(по итогам IV тура команда может получить 27 балла (то есть по в 9 баллов за каждое правильно решенное задание) 25 минут на решение заданий IV тура)

IV−3.

В треугольнике ABC, угол A=60^0. Биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Могут ли быть равны отрезки OB_1 и OC_1?

Решение:

Будет равным. Так как $\angle BOC = \angle B_1OC_1$=$120^0$.

Тогдаиз$\angle B_1OC_1$+$\angle A$=180^0 следует что четырехугольник B_1AC_1O вписан в окружность. Из того что O- точка пересечение биссектрисс, следует $\angle B_1C_1O$=$\angle B_1AO$=$30^0$$\angle C_1B_1O$=$\angle C_1AO$=$30^0$

(углы стягивающие равные дуги).Тогда ΔB_1OC_1 равнобедренный, значит отрезки OB_1 и OC_1 равны.