**«Математикалық регата»**
**республикалық олимпиадасының I (бірінші) кезең тапсырмасы**

(I кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 18 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға алты ұпайдан)   10 минут I кезең тапсырмаларын шешуге беріледі)

**I −1.**

**Жайылымдық алқаптың шөбі біркелкі және бірдей жылдамықпен өседі. Алқаптың шөбін 70 жылқы 24 күнде, 30 жылқы 60 күнде жеп тауысады. Осы алқаптың шөбін 96 күнде қанша жылқы жеп бітіреді.**

**Шешуі:**

**1-ші тәсіл**

Бір жылқының бір күнде жейтін шөбінің мөлшерін 1 бөлік деп алайық.

1)24 күннен кейінгі шөптің мөлшері: 70·24=1680 (бөлік).

2)60 күннен кейінгі шөптің мөлшері: 30·60=1800 (бөлік).

3)36 күнде өсетін шөптің мөлшері: 1800 −1680 = 120 (бөлік).

4)96 күннен кейінгі алаңдағы шөптің мөлшері: 1800 +120 = 1920 (бөлік).

5)Алқаптың шөбін қанша жылқы 96 күнде жеп тауысады: 1920:96= 20жылқы.

**2-ші тәсіл.** Алқапта өсіп тұрған шөп мөлшерін у деп, күн сайын өсіп қосылатын шөп мөлшері х деп белгілейік.

Онда 70 жылқы 24 күнде жейтін шөпмөлшері у+24х, 30 жылқы 60 күнде жейтін шөпмөлшері у+60х болады. Пропорция құрайық :

$$\frac{70\cdot 24}{30\cdot 60}=\frac{y+24x}{y+60x}$$

$$\frac{14}{15}=\frac{y+24x}{y+60x}$$

$$15y+360x=14y+840x$$

$$y=480x$$

Алқапта дайын өсіп тұрған шөп күндік өсіп қосылатын шөптен 480 есе артық екен.

70 жылқы   24 күнде     504х      шөп
t жылқы       96 күнде    у+96х    шөп

70   ---   24  ---   504х
t      ---   96 ---   576х

$$\frac{70\cdot 24}{t\cdot 96}=\frac{504x}{576x};\qquad 14t=280$$

$$\frac{35}{2t}=\frac{7}{8}\qquad t=20$$

Жауабы: 20 жылқы.

**«Математикалық регата»**
**республикалық олимпиадасының I (бірінші) кезең тапсырмасы**

(I кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 18 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға алты ұпайдан) 10 минут I кезең тапсырмаларын шешуге беріледі)

**I −2.**

$(\boldsymbol{x^2 - x - 1})^3 + (\boldsymbol{2x^2 - x - 7})^3 = (\boldsymbol{3x^2 - 2x - 8})^3$ **теңдеуін шеш.**

**Шешуі:**

Белгілеу еңгізіп көбейткішке жіктеп көрелік.

$x^2 - x - 1$=a ,$2x^2 - x - 7$=b

$$(x^2 - x - 1)^3 + (2x^2 - x - 7)^3 = \left((x^2 - x - 1) + (2x^2 - x - 7)\right)^3 \Rightarrow$$

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 \Rightarrow$ (a+b)$(a^2 - ab + b^2)$ =$(a + b)^3 \Rightarrow$

(a+b)$(a^2 - ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2))$=0 $\Rightarrow$ (a+b)(-3ab) =0 $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 0 \\ 2x^2 - x - 7 = 0 \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ x= $-\frac{4}{3}$;2;$\frac{1\pm\sqrt{57}}{4}$;$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

**«Математикалық регата»**

**республикалық олимпиадасының I (бірінші) кезең тапсырмасы**

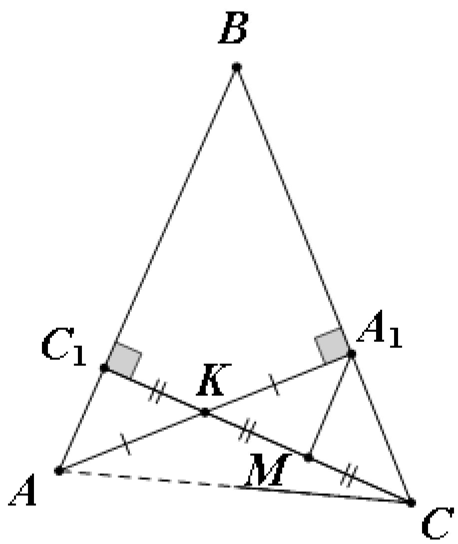
(I кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 18 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға алты ұпайдан) 10 минут I кезең тапсырмаларын шешуге беріледі)

**I −3.**

**ABC үшбұрышының A және C төбелерінен жүргізілген биіктіктері үшбұрыштың ішінде қиылысады жәнеде қиылысу нүктесі бір биіктікті қақ, ал келесі биіктікті 2:1 қатынаста бөледі. Олай болса B төбесінің бұрыштық шамасын тап.**

**Шешуі:**

$AA_1$ және $CC_1$ биіктіктерінің қйылысу нүктесін K деп белгілейік.Онда есептің шарты бойынша AK=K$A_1$; CK=2K$C_1$болады.CK кесіндісінің ортасын M деп белгілесек $KMA_1$ және $KC_1A$ үшбұрыштары өзара тең болады(үшбұрыштар теңдігінің 1-ші белгісі бойынша). Бұдан $AC_1$= M$A_1$болады.Тікбұрышты үшбұрыштың медиананың қасиеті бойынша M$A_1$=$\frac{KC}{2}$ .Яғни $AC_1$= MK = $KC_1$.Онда $KAC_1$үшбұрышы теңбүйірлі тікбұрышты дегеннен ∠$KAC_1$=$45^0$болады. Онда $AA_1$B тікбұрышты үшбұрышынан ∠B=$90^0 -$ ∠$KAC_1$=$45^0$ болады.



**«Математикалық регата»**
**республикалық олимпиадасының II (екінші) кезең тапсырмасы**

(II кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 21 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға жеті ұпайдан) 15 минут II кезең тапсырмаларын шешуге берледі)

**II −1.**

**27000001 санын жай сандардың көбейтіндісіне жіктеп, жай көбейткіштердің қосындысын тап.**

**Шешуі:**
27000001=27000000+1=$300^3$+$1^3$=$(300+1)(300^2-300\cdot 1+1^2)=301$ ·$(300^2+2\cdot 300+1^2-3\cdot 300)$=301·($(300+1)^2-900$)=301·(301+30)(301-30)=301·271·331=7·43·271·331.271 және 331 сандарының жай немесе құрама сан екенін 2,3,5,7,11,13 < $\sqrt{271}$, 2,3,5,7,11,13,17 < $\sqrt{331}$ сандарына бөлу арқылы тексереміз. Олай болса 7+43+271+331=652.

**«Математикалық регата»**

**республикалық олимпиадасының II (екінші) кезең тапсырмасы**

(II кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 21 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға жеті ұпайдан)  15 минут II кезең тапсырмаларын шешуге берледі)

**II −2.**

**k-ның қандай мәнінде (k-2)$x^2$-2(k+3)x+4k = 0 теңдеуінің бір түбірі 2-ден кіші, бір түбірі 3-тен үлкен болады.**

**Шешуі:**

f(x) =(k-2)$x^2$-2(k+3)x+4k функциясы үшін 2 жағдай алып көрелік.

а) k > 2 болсын (яғни параболаның тармағы жоғары қараған делік).Бұл жағдайда

$$\begin{cases} k > 2 \\ f(2) < 0 \\ f(3) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 2 \\ 4(k-2) - 4(k+3) + 4k < 0 \\ 9(k-2) - 6(k+3) + 4k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 2 \\ 4k < 20 \\ 7k < 36 \end{cases}$$

k∈(2;5)

ә) k < 2 болсын (яғни параболаның тармағы төмен қараған делік).Бұл жағдайда

$$\begin{cases} k<2 \\ f(2) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<2 \\ 4(k-2) - 4(k+3) + 4k > 0 \\ 9(k-2) - 6(k+3) + 4k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<2 \\ 4k > 20 \\ 7k > 36 \end{cases}$$

k∈ ∅. Жауабы k∈(2;5).

**«Математикалық регата»**

**республикалық олимпиадасының II (екінші) кезең тапсырмасы**

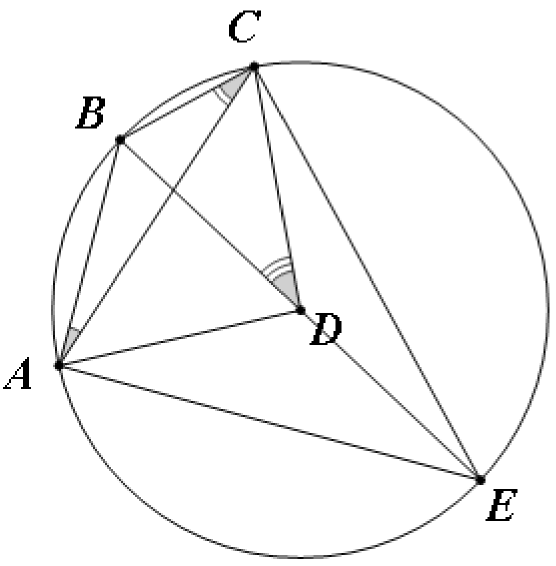
(II кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 21 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға жеті ұпайдан) 15 минут II кезең тапсырмаларын шешуге берледі)

**II −3.**

**ABCD дөңес төртбұрышы үшін $\angle BAC=20^0$, $\angle BCA=35^0$, $\angle BDC=40^0$, $\angle BDA=70^0$ болса, осы төртбұрыштың диагоналдарының арасындағы бұрышты тап.**

**Шешуі:**

ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберді $\omega$ деп белгілейік. BD түзуінің $\omega$ шеңберімен қиылысу нүктесін E деп белгілейік.Тең доғаға тірелген шеңберге іштей сызылған бұрыштар өзара тең болатындықтан, $\angle DEC= \angle BAC=20^0$ болады. $\angle BDC$ бұрышы DEC үшбұрышының сыртқы бұрышы жәнеде$\angle BDC=40^0$ болғандықтан, $\angle DCE=20^0$болады.Онда ED=DC болады. Дәл осылайша ED=AD болатындығы дәлелденеді. Осылайша D-нүктесі біз алып көріп отырған$\omega$ шеңберінің центрі болып табылады. Жәнеде $\angle DCA=\frac{1}{2}(180^0-110^0)=35^0$. Осылайша $\angle BMC=40^0+35^0=75^0$ болады .



**«Математикалық регата»**
**республикалық олимпиадасының III (үшінші) кезең тапсырмасы**

(III кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 24 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға сегіз ұпайдан) 20 минут III тапсырмаларын шешуге беріледі)

**III −1.**

**Кез келген 10 натурал сан берілген. Бұлардың кез келген екеуін алып, олардың қосындысы, айырмасы, көбейтінділерінің абсолют шамасын белгіледік. Белгілеген сандардың ішінде ең көп қанша тақ сан болуы мүмкін?**

**Шешуі:**

Берілген 10 санның k саны тақ, 10-k саны жұп болсын. Олай болса белгіленген сандардың ішінде қосындысы тақ сан болатын k(10-k) сан бар. Ал айырмасының модулі тақ сан болатын да k(10-k) сан, ал көбейтіндісі тақ сан болатын $\frac{1}{2}k(k-1)$ сан бар. Олай болса белгіленген сандардың ішінде барлығы $N=k(10-k) + k(10-k) + \frac{1}{2}k(k-1) = 2k(10-k) +\frac{1}{2}k(k-1)$ тақ сан бар.Түрлендірейік: $N = 2k(10-k) +\frac{1}{2}k(k-1)= \frac{1}{2}(39k-3k^2)= \frac{3}{2}\left(\left(\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{13}{2}-k\right)^2\right)$осынша тақ сан бар. Бұдан k-ны таңдай отырып k=6 немесе k=7 деп таба аламыз. Осы мәнде ғана N ең үлкен мән қабылдай алады. Екі жағдайда да N=63 деп шығады, онда ең көп 63 тақ сан бар.

**«Математикалық регата»**
**республикалық олимпиадасының III (үшінші) кезең тапсырмасы**

(III кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 24 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға сегіз ұпайдан) 20 минут III тапсырмаларын шешуге беріледі)

**III −2.**

**a,b сандары ab > 2018a+2019b болатын оң сандар болса, онда a+b >** $\left(\sqrt{\mathbf{2018}}+\sqrt{\mathbf{2019}}\right)^{\mathbf{2}}$ **теңсіздігін дәлелде.**

**Шешуі:**

ab > 2018a+2019b теңсіздігінің екі жағын $\frac{a+b}{ab}$өрнегімен көбейтсек, a+b > $\frac{2018(a+b)}{b}+\frac{2019(a+b)}{a}$ болады.Коши теңсіздігін қолдансақ:

$\frac{2018(a+b)}{b}+\frac{2019(a+b)}{a}$= 2018+$\frac{2018a}{b}+\frac{2019b}{a}$ +2019 ≥ 2018+2·$\sqrt{\frac{2018a}{b}\cdot\frac{2019b}{a}}$+2019= $\left(\sqrt{2018}+\sqrt{2019}\right)^2$деп шығып теңсіздік дәлелденді.

**«Математикалық регата»**
**республикалық олимпиадасының III (үшінші) кезең тапсырмасы**

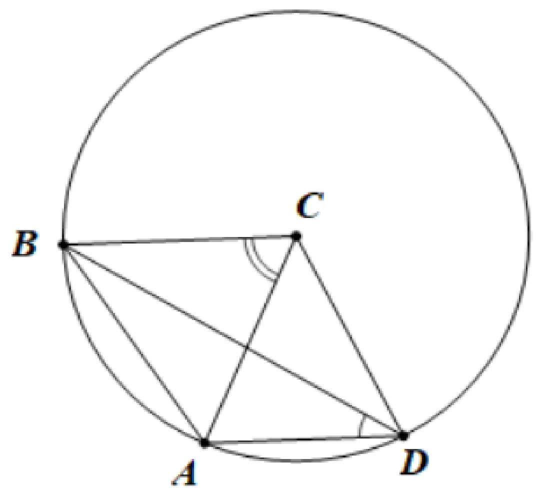
(III кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 24 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға сегіз ұпайдан) 20 минут III тапсырмаларын шешуге беріледі)

**III −3.**

**ABCD трапециясы үшін (AD‖BC) $2\cdot\angle ADB=\angle ACB$ және BC=AC=5, AD=6 болса, трапецияның ауданын тап.**

**Шешуі:**

CB=CA және$\angle ACB=2\cdot\angle ADB$ болатындықтан, шеңбер центрі туралы теорема бойынша D нүктесі, центрі C нүктесі болатын радиусы CB болатын шеңбердің бойында жатыр.Осылайша ACD үшбұрышы теңбүйірлі болып табылады. C төбесінен түсірілген биіктікті h десек h=$\sqrt{5^2-3^2}$ осылайша S=$\frac{6+5}{2}\cdot 4$=22.



**«Математикалық регата»**
**республикалық олимпиадасының IV (төртінші) кезең тапсырмасы**

(IV кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 27 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға тоғыз ұпайдан) 25 минут IV тапсырмаларын шешуге беріледі)

**IV −1.**

**Егер $x_k = \frac{k}{2005}$, k=1,2,3,...,2004 болса,**

$\frac{x_1^3}{1-3x_1+3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1-3x_2+3x_2^2} + \cdots + \frac{x_{2004}^3}{1-3x_{2004}+3x_{2004}^2}$ **қосындының мәнін тап.**

**Шешуі:**

f(x)= $\frac{x^3}{1-3x+3x^2}$деп белгілеу еңгізейік. Онда $\frac{x^3}{1-3x+3x^2} = \frac{x^3}{(1-x)^3+x^3}$болғандықтан f(x)+f(1-x) =1 болады.Олай болса $\frac{x_1^3}{1-3x_1+3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1-3x_2+3x_2^2} + \cdots + \frac{x_{2004}^3}{1-3x_{2004}+3x_{2004}^2}$ = (f($x_1$)+f($x_{2004}$))+ (f($x_2$)+f($x_{2003}$))+…+ (f($x_{1002}$)+f($x_{1003}$)) =$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1002}$= 1002 болады.

**Математикалық регата»**
**республикалық олимпиадасының IV (төртінші) кезең тапсырмасы**

(IV кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 27 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға тоғыз ұпайдан) 25 минут IV тапсырмаларын шешуге беріледі)

**IV−2.**

**$\sin 10^0$ санының иррационал болатындығын дәлелде.**

**Шешуі:**

Бұл есептің әр түрлі шешімі бар соның біреуін ғана көрсетейік.

Кері жорып $\sin 10^0$ рационал сан деп көрейік.Олай болса $\sin 30^0=\frac{1}{2}$ теңдігінен 2$\sin 30^0$=1. $\sin 3x = 3\sin x - 4(\sin x)^3$ формуласын пайдалансақ: $\sin 30^0$=$\sin 3 \cdot 10^0$=3$\sin 10^0$-4$(\sin 10^0)^3$ $\Rightarrow$
1= $2(3\sin 10^0 - 4(\sin 10^0)^3)$=6$\sin 10^0$-8$(\sin 10^0)^3$деп шығады .
Олай болса $8(\sin 10^0)^3 - 6\sin 10^0 + 1$= 0 куб теңдеу шығарып аламыз . $\sin 10^0$ =t деп белгілеу еңгізсек $8t^3 - 6t + 1 = 0$ теңдеуі шығады.Егер теңдеудің рационал түбірі болса болса ол түбірі $\pm1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{1}{8};$ түрінде болу қажет t-ның осы мәндерін $8t^3 - 6t + 1 = 0$ теңдеуіне қойып тексеру арқылы t- ның мәндері рационал емес екеніне көз жеткіземіз.Олай бол t- ның мәні иррационал. Яғни $\sin 10^0$ иррационал сан болады.

**Математикалық регата»**

**республикалық олимпиадасының IV (төртінші) кезең тапсырмасы**

(IV кезеңнің барлық шешілген тапсырмаларына команда 27 ұпай ала алады (яғни, әрбір дұрыс шешілген тапсырмаға тоғыз ұпайдан) 25 минут IV тапсырмаларын шешуге беріледі)

**IV −3.**

**ABC үшбұрышының A бұрышының шамасы $60^0$. $BB_1$ және $CC_1$ биссектрисалары O нүктесінде қиылысады. Онда $OB_1$ және $OC_1$ кесінділері тең болуға болама**.

**Шешуі:**

Тең болады. Себебі $\angle BOC = \angle B_1OC_1 = 120^0$. $\angle B_1OC_1 + \angle A = 180^0 \Rightarrow$ $B_1AC_1O$төртбұрышына сырттай шеңбер сызуға болады.O- нүктесі биссектрисалардың қиылысу нүктесі дегеннен $\angle B_1C_1O = \angle B_1AO = 30^0 \angle C_1B_1O = \angle C_1AO = 30^0$ (тең доғаға тірелген бұрыштар).Олай болса $\Delta B_1OC_1$ тең бүйірлі, яғни $OB_1$ және $OC_1$ кесінділері өзара тең.